УДК 65.86
DOI: https://doi.org/10.26642/jen-2019-2(88)-3-10

Н.В. Валінкевич, проф., д.е.н.
К.С. Солонінко, проф., к.е.н.
Державний університет «Житомирська Політехніка»
А.Й. Щехорський, доц., к.ф.-м.н.
Житомирський державний університет імені Івана Франка

Принцип раціональності в економіко-математичному моделюванні попиту

Вирішення проблеми. та його зв'язок з важливими науковими та практичними завданнями. У економіці існує ефективний інструмент для пояснення змін в економічному середовищі – це моделювання економічних процесів. Моделювання економічних процесів залежить від побудови економічної моделі, на основі якої відбувається формалізація економічного процесу, тобто побудова математичної моделі. Ефективним способом формалізації економічного процесу є створення гіпотетичної моделі. На ринку товарів і послуг необхідно побудувати модель попиту. Проблема враховує отримання, як результат моделювання, певних функціональних характеристик кривих попиту, на яких визначається їх математична модель. Умов, за яких формується економічна модель попиту, недостатньо. У економічну модель попиту включена умова - принцип раціональної поведінки споживачів на ринку товарів і послуг. За цих умов побудована економіко-математична модель попиту дозволила отримати необхідні функціональні характеристики кривих попиту - опуклості, диференціації, плавності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження і побудова моделей кривих попиту присвячено роботі багатьох вчених, як іноземних, так і вітчизняних. Незважаючи на значні досягнення вчених, виникають такі проблеми, як функціональні характеристики таких кривих, їх практичне використання в модельному процесі.

Метою статті є опис функціональних властивостей кривих попиту на ринку товарів і послуг на основі моделювання їх попиту;

Наукова новизна і практична цінність. Теоретичні положення (для функціональних властивостей кривих попиту), отримані в результаті проведених досліджень, тобто опуклість, диференціація, гладкість, дають додаткові практичні можливості в мікроекономічному аналізі і в конструкціях моделей кривих за статистичними даними. Дослідження також можуть бути застосовані для визначення функціональних властивостей кривих попиту.

Ключові слова: *крива попиту; модель; принцип раціональності.*

Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв’язок із важливими науковими та практичними завданнями. В економіці є дієвий інструмент для пояснення змін в економічному оточенні – це моделювання економічних процесів, що залежить в першу чергу від побудови економічної моделі, на основі якої відбувається формалізація економічного процесу, тобто побудова економіко-математичної моделі.

Однією із проблем, яка виникає в побудові економіко-математичної моделі попиту на ринку товарів і послуг є визначення певних функціональних характеристик специфікації моделі попиту за рядом факторів залежно від раціональної поведінки споживачів ринку. Проблема полягає в отриманні в результаті моделювання певних функціональних характеристик, якими може володіти крива попиту, такими як вгнутість, диференційованість, неперервна диференційованість, а також отримання їх адекватності певній поведінці споживачів ринку, мається на увазі раціональної поведінки на ринку товарів і послуг.

Джерела вказаної проблеми мають свій початок в теорії споживання. З економічної теорії відомо, функціональна характеристика кривої байдужості – крива байдужості вгнута вниз. Це пов’язано з принципом (законом) спадної граничної корисності, згідно з яким, чим більша кількість такого блага має споживач, тим меншу кількість іншого блага він готовий пожертвувати, щоб отримати більше даного блага. Проблема – відсутність строгого математичного обґрунтування вгнутості кривої байдужості. Закон спадної граничної корисності дозволяє обґрунтувати закон спадного попиту, тому виникає аналогічна проблема відсутності строгого математичного обґрунтування вгнутості кривої спадного попиту, і, на кінець, відсутність правильного вибору специфікації моделі попиту.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.В цілому, дослідженню і побудови моделей попиту присвячено праці багатьох вчених, як зарубіжних, так і вітчизняних. Незважаючи на значний доробок вчених, існують такі проблеми, як побудова економіко-математичних моделей попиту з урахуванням функціональної характеристики кривих попиту і їх адекватності раціональній поведінці споживачів на ринку товарів і послуг.

Метою статті є отримання функціональних характеристик кривих попиту, їх використання в модельному процесі з урахуванням раціональної поведінки споживачів на ринку товарів і послуг.

Наукова новизна та практична значущість. Отримані в результаті дослідження функціональні характеристики кривих попиту, такі як вгнутість, гладкість дають додаткові практичні можливості в побудові економіко-математичних моделей за статистичними даними попиту з урахуванням принципу раціональної поведінки споживачів на ринку товарів і послуг, а також в мікроекономічному аналізі моделей попиту. Методи досліджень можуть бути застосовані для виявлення функціональних характеристик і для кривих пропозиції.

Викладення основного матеріалу досліджень. Отримання таких функціональних характеристик для специфікації моделі, як монотонність, вгнутість, диференційовність, неперервна диференційовність вимагає поняття неперервного продовження моделі за її статистичними даними. Як правило, в більшості випадків статистичні дані показників моделі мають неподільні одиниці виміру. Наприклад, ціна, як статистичне значення, має одиницю виміру з точністю до сотих, тобто, якщо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ статистичні дані показника ціни, то із неподільності одиниці його виміру випливає існування числа δ > 0, що має місце нерівність $\min\limits_{i \neq j} \left| x_i - x_j \right| \geq \delta$, де δ = 0,01. Нерівність дає можливість гіпотетично розширити функціонування ціни x для значень, що задовольняють зворотну нерівність $\left| x_i - x \right| \lhd \delta$, (i = 1,…, n), а також довизначити значення специфікації моделі за її статистичними даними.

З економічної теорії споживання відомо, крива байдужості являє собою сукупність товарів і послуг, які забезпечують споживачу рівний обсяг задоволення потреб, тобто приносять йому однакову корисність. Криві байдужості наглядним способом представляються множиною точок (x ,у), що символізують набори товарів X і Y . Переходом від однієї точки A до іншої точки В кривої байдужості (крива AB називається зоною заміщення) споживач збільшує (скорочує) товар X на величину Δx і відповідно скорочує (збільшує) на величину Δy товар Y таким чином, що сукупна корисність для нього лишається незмінною. Ефективність такого заміщення на зоні AB, або гранична норма заміщення визначається відношенням – $\Delta y/\Delta x$, де знак «мінус» вказує на те, що приріст споживання одного товару відбувається за рахунок скорочення споживання іншого і навпаки. Оскільки гранична норма заміщення – від'ємна величина, то функціональна характеристика кривої байдужості $y = f(x)$ – монотонність.

Монотонна функція не обов'язково вгнута (вниз, вгору). Для отримання такої властивості, як вгнутість необхідне виконання першого закону Госсена (принципу спадної граничної корисності, або насичення потреб), зміст якого полягає в тому, що за умови повного задоволення потреб споживача гранична корисність зменшується, якщо із (до) набору товарів послідовно забираємо (додаємо) будь-яку фіксовану кількість одиниць першого товару, а для утримання того самого рівня корисності додаємо (утримуємо) більше (менше) іншого товару. Формалізація закону Госсена відбувається порівнянням таких відношень переваг:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} > \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_3}, \tag{1}$$

де (x_i ,y$_i$) – довільні три точки кривої байдужості $y = f(x)$, для яких $y_1 > y_2 > y_3 > 0$. $x_1 > x_2 > x_3 > 0$. $y_1 - y_2 > y_2 - y_3$. $x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \delta$. Враховуючи, що $x_2 = x$, $x_1 = x - \delta$, $x_3 = x + \delta$, $y_2 = f(x)$, $y_1 = f(x-\delta)$, $y_3 = f(x+\delta)$, нерівність (1) записується у вигляді

$$f(x-\delta) - f(x) > f(x) - f(x+\delta) \tag{2}$$

Нерівність (2) разом з законом Госсена виражає собою спад споживчого ефекту на кожну наступну додану одиницю товару.

Відомий ряд властивостей кривої байдужості, серед якого така функціональна властивість – крива байдужості вгнута вниз. Це пов'язано із законом спадної граничної корисності. У випадку диферецційовності функції корисності ця властивість не потребує доведення – монотонно спадна похідна є достатньою для цього умовою. Але монотонно спадна функція не обов'язково диференційована. За теоремою Бореля [4], монотонність функції дає можливість існування тільки майже всюди в неї похідної, тобто похідна в такої функції існує у всіх точках заданої області зміни функції за виключенням множини точок E нульової міри Лебега. Тому виникає питання визначення вгнутості кривої байдужості за нерівністю (2). Відповідь на нього дає твердження 1.

Твердження 1. Визначена на інтервалі (0; ∞) функція $f(x)$ вгнута вниз (вверх) тоді і тільки тоді, коли для довільного x і $\delta > 0$ виконується нерівність $f(x-\delta) - f(x) \geq f(x) - f(x+\delta)$ ($f(x-\delta) - f(x) \leq f(x) - f(x+\delta)$).

Доведення необхідності проводиться за методикою [10], яка застосовувалась тільки для функціонального рівняння Йєнсена. Нехай для довільного x із (0; ∞) і $\delta > 0$ виконується нерівність

$$f(x-\delta) - f(x) \geq f(x) - f(x+\delta)\ . \tag{3}$$

Нерівність (3) рівнозначна нерівності

$$f(x-\delta) + f(x+\delta) \geq 2f(x) \tag{4}$$

Для заданих x_1 і x_2 із інтервалу (0; ∞) можна знайти такі x і $\delta > 0$, що $x-\delta = x_1$, $x+\delta = x_2$. Звідси, розв'язуючи задану систему рівнянь, знаходимо, $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \delta = \frac{x_1 - x_2}{2}$. Підстановка знайдених значень x і δ в нерівність (4) приводить до нерівності

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \tag{5}$$

яка є визначенням вгнутості функції *f(x)*. Для доведення достатності потрібно провести доведення твердження 1 в зворотному порядку.

Аналогічно доведенню твердження 1 проводиться доведення твердження стосовно вгнутості функції *f(x)* вверх.

Зауважимо, твердження 1 невідоме в літературі і тому властивість вгнутості кривої байдужості тільки за умови (2) (спаду споживчого ефекту), виключаючи умову диференційованості кривої байдужості, отримати неможливо.

Закон спадної граничної корисності дозволяє обґрунтувати закон спадного (взагалі монотонного) сукупного попиту на ринку товарів і послуг.

Практика показує, що попит насамперед залежить від ціни і від таких факторів:

1) рівень доходів в суспільстві;
2) розміри ринку;
3) мода, сезонність;
4) наявність товарів – субститів(замінників);
5) інфляційні очікування.

Розглядаються однофакторні моделі залежності попиту від ціни. На ринку товарів і послуг, за рахунок довизначення значень попиту за статистичними даними ціни, можна вважати функціональну залежність між ціною і попитом кусково монотонною. Такої залежності, виходячи із статистичних даних, завжди можна досягти. Практика показує, що за незмінності умов 1 -5 зниження або підвищення ціни на товар викликає, як правило, монотонну зміну величини попиту. Наприклад, для звичайних товарів має місце спадний закон попиту, функція попиту спадна монотонна крива, а для товарів Гіффена – монотонно зростаюча. В цілому, формалізація економічної моделі попиту дає можливість отримати тільки одну функціональну характеристику кривої попиту – функція попиту монотонна функція.

Для отримання інших функціональних характеристик монотонності кривої попиту (зокрема закону попиту) не досить, в економічну модель попиту варто включити раціональну поведінку споживачів на ринку товарів і послуг, тобто закон спаду (зростання) споживчого ефекту. Як зазначено в багатьох літературних джерелах, принцип раціональності, або раціональна поведінка споживачів на ринку товарів і послуг може розглядатися двояко – на кожну додаткову грошову одиницю ціни на товар чи послугу споживач може 1) купувати менше, або більше товару (споживчий ефект); 2) здійснювати менші або більші витрати коштів (ефект витрат). У кінцевому підсумку на попит впливає саме ефект витрат.

За дискретними статистичними даними(x_i, y_i)) і = 1,2….*n*, в яких x_i – ціна, $x_{i+1} - x_i = \delta$ – постійна зміна ціни, y_i – величина попиту, стосовно зміни ціни від x_{i-1} до x_i різниця $y_{i-1} - y_i$ визначає споживчий ефект, для якого принцип раціональності розглядається в двох випадках: 1) спадний споживчий ефект, коли $y_{i-1} - y_i \geq y_i - y_{i+1}$, $y_{i-1} \geq y_i$; зростаючий споживчий ефект, коли, $y_{i-1} - y_i \leq y_i - y_{i+1}$, $y_{i-1} \geq y_i$. ($i \geq 2$). Також зі ростом цін і монотонності витрат може проявлятися в двох випадках і ефект витрат: 1) зростаючий ефект витрат, коли $x_{i-1} y_{i-1} - x_i y_i \geq x_i y_i - x_{i+1} y_{i+1}$, : $x_{i-1} y_{i-1} \leq x_i y_i$ ($i \geq 2$); спадний ефект витрат, коли $x_{i-1} y_{i-1} - x_i y_i \leq x_i y_i - x_{i-1} y_{i+1}$, : $x_{i-1} y_{i-1} \leq x_i y_i$ ($i \geq 2$). Таким чином, із введенням споживчого ефекту і ефекту витрат принцип раціональності полягає в тому, що раціональна поведінка споживача на ринку товарів і послуг визначається двояко – із зростанням ціни на товар чи послугу (в тому числі, як того вимагається в багатьох літературних джерелах, і на одну грошову одиницю, тобто, коли $x_i - x_{i-1} = 1$ (і ≥ 2),) споживач може: 1) купувати менше (більше) товару (споживчий ефект); 2) здійснювати менші (більші) витрати коштів (випадок – ефекту витрат).

У результаті економіко математичного моделювання, за наявності принципу раціональності в статистичних даних, потрібно специфікації *f(x)*, *xf(x)* моделей попиту і витрат вибирати такими, які б задовольняли принцип раціональності. Перш за все, функції попиту *f(x)* і витрат *xf(x)* повинні бути кусково-монотонними в своїй області визначення. Кускова монотонність означає можливість розбиття області визначення функції на області, в яких вона монотонна спадна або зростаюча. Для специфікацій *f(x)*, *xf(x)* моделі принцип раціональності має проявлятися в двох випадках: 1) модель спадного (зростаючого) споживчого ефекту: для довільного значення ціни x і її підвищення на δ одиниць має місце нерівність $f(x-\delta) - f(x) \geq f(x) - f(x+\delta)$, коли $f(x-\delta) \geq f(x+\delta)$ ($f(x-\delta) - f(x) \leq f(x) - f(x+\delta)$, коли $f(x-\delta) \geq f(x+\delta)$;

2) модель спадного (зростаючого) ефекту витрат проявляється в тому, що для довільного значення ціни x і її підвищення на δ одиниць має місце нерівність:

$(x-\delta) f(x-\delta) - xf(x) \geq xf(x) - (x+\delta)f(x+\delta)$, коли $(x-\delta) f(x-\delta) \geq (x+\delta)f(x+\delta)$ ($(x-\delta) f(x-\delta) - xf(x) \leq xf(x) - (x+\delta)f(x+\delta)$, коли $(x-\delta) f(x-\delta) \geq (x+\delta)f(x+\delta)$).

Зауважимо, що «закон» спаду витрат сильніший за закон попиту, підтвердженням цьому слугують очевидні рівнозначні нерівності: $(x+\delta)f(x+\delta) \leq xf(x) \Leftrightarrow f(x+\delta) \leq \frac{x}{(x+\delta)} f(x) \leq f(x)$ $\left(\frac{x}{(x+\delta)} \leq 1\right) \Rightarrow f(x+\delta) \leq f(x)$.

Застосування твердження 1 приводить до того, що наявність спадного (зростаючого) споживчого ефекту (принципу раціональності у споживачів ринку) визначає таку функціональну характеристику кривої попиту, як вгнутість вниз (вверх). Зворотність стосовно твердження 1 полягає в тому, що вгнутість кривої попиту вниз або уверх визначає наявність принципу раціональної поведінки споживачів ринку. Таким чином встановлено адекватність понять вгнутості кривої попиту і принципу раціональності споживачів.

За аналогічними міркуваннями, які використовувались при доведенні твердження 1, можна встановити твердження, яке полягає в тому, що нерівність

$$(x-\delta) f(x-\delta) - xf(x) \geq xf(x) - (x+\delta)f(x+\delta) \quad ((x-\delta) f(x-\delta) - xf(x) \leq xf(x) - (x+\delta)f(x+\delta))$$

визначає вгнутість вниз (вверх) функції витрат, тобто справедливе наступне математичне твердження.

Твердження 2. Визначена на інтервалі $(0; \infty)$ функція $xf(x)$ вгнута вниз (вверх) тоді і тільки тоді, коли для довільних x і $\delta > 0$ виконується нерівність $f(x-\delta) - f(x) \geq f(x) - f(x+\delta)$ ($f(x-\delta) - f(x) \leq f(x) - f(x+\delta)$).

Схема доведення твердження 2 лишається тією самою, що і для доведення твердження 1, просто під час доведення твердження 1 потрібно замінити функцію $f(x)$ *на* $xf(x)$.

Із приведеного твердження 2 можна зробити такий висновок, коли функція сукупних витрат споживачів ринку є вгнутою вниз (вверх) кривою, то на ринку спостерігається спадний (зростаючий) витратний ефект, тобто має місце принцип раціональної поведінки споживачів стосовно витрат. У зворотному порядку, принцип раціонального споживання (раціональних витрат) вказує на наявність вгнутості кривої попиту (витрат). Таким чином, вгнутість монотонної функції сукупних витрат вказує на адекватність наявності принципу раціональної поведінки споживачів ринку.

Принцип раціональності, як зазначалося, визначається двояко – принцип ефекту споживання і принцип ефекту витрат. Стосовно процесу моделювання доцільно мати їх зв'язок в розумінні таких функціональних характеристик попиту і витрат, як вгнутість кривих попиту і витрат. Він може бути представлений наступним математичним твердженням, анонсованим і доведеним в [11].

Твердження.3. Якщо функція $x f(x$ вгнута вниз (вверх) на проміжку $(a; b)$ ($a > 0$, $b > 0$) і $f(x)$ спадна (зростаюча) на проміжку $(a; b)$, то $f(x)$ вгнута вниз (вверх) на цьому проміжку.

Твердження 3 надає можливість зробити такий висновок, що із принципу раціональності витрат споживачів ринку (твердження 2) слідує принцип їх раціональної поведінки споживання (твердження 1).

Має місце деякою мірою обернене твердження до твердження 3.

Твердження 4. Якщо функція $f(x)$ вгнута вверх і спадна (зростаюча) на проміжку $(a; b)$, то функція $x f(x)$ вгнута вверх на проміжку $(a; b)$ ($a > 0$, $b > 0$).

Проведемо математичне доведення твердження 4. Нехай функція $f(x)$ спадна і вгнута вверх на проміжку $(a; b)$. Потрібно довести, що функція $x f(x)$ вгнута вверх, тобто, за визначенням, для довільних x_1 і x_2 із проміжку $(a; b)$ справедлива нерівність

$$\frac{x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2)}{2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \tag{6}$$

Оскільки функція $f(x)$ монотонно спадна і вгнута вверх, то для довільного $\delta > 0$ справедлива нерівність, $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \delta(f(x_2) - f(x_1))$, яка в свою чергу рівнозначна нерівності, $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \left(\frac{1}{2} - \delta\right) f(x_1) + \left(\frac{1}{2} + \delta\right) f(x_2)$. В цій нерівності як число $\delta > 0$ візьмемо число $\delta = \frac{1}{2} - \frac{x_1}{x_1 + x_2} = \frac{x_1}{x_1 + x_2} - \frac{1}{2}$, отримаємо нерівність

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{x_1}{x_1 + x_2} f(x_1) + \frac{x_1}{x_1 + x_2} f(x_2), \tag{7}$$

з якої випливає нерівність (6). Доведення другого випадку аналогічне доведенню першого зазначеного вище випадку.

Твердження 4 констатує, що зі зростанням споживчого ефекту слідує і зростання ефекту витрат

Варто зауважити, що із монотонності функції $f(x)$ не завжди слідує монотонність функції $x\ f(x)$, (існують приклади таких функцій), тобто зниження попиту з ростом ціни не означає зниження витрат споживачів. З цієї причини обернене твердження до твердження 3 не має місця.

Таким чином, для отримання таких функціональних характеристик, як монотонність, вгнутість функцій попиту і витрат досить виконання ефекту споживання і ефекту витрат відповідно.

З'ясуємо питання, яким чином умова диференційованості функцій попиту і витрат, а також їх неперервної диференційованості, що часто виникає при моделюванні, пов'язана з принципом раціональної поведінки споживачів ринку. В загалі, виходячи із закону попиту на ринку товарів і послуг, принципу раціональності, представлені за статистикою функціональні характеристики залежності попиту і витрат від ціни (монотонність, вгнутість) не є однозначними. Такою простою функціональною характеристикою функцій попиту і витрат є полігон їх статистичних даних, або кусково-лінійна залежність, яка з'єднує точки (як відображення статистичних даних) відрізками (рис. 2). У точках статистики цін $\{x_i\}$ функції попиту і витрат не мають похідних.

Питання диференційованості функцій попиту і витрат важливе з точки зору існування граничних значень ефективності попиту і витрат. Між іншим, за своєю природою, із диференційованості функції попиту випливає диференційованість функції витрат по тій причині, що остання одержується множенням функції попиту на незалежну змінну. Тому насамперед приділимо увагу функції попиту.

Взагалі, за теоремою Бореля [4] монотонність функції попиту дає можливість існування майже всюди в неї похідної, тобто похідна в такої функції існує у всіх точках за виключенням множини точок E нульової міри Лебега. Для полігону такою множиною є множина статистичних значень цін. В припущенні, що функція попиту не є полігоном, твердження теореми Бореля лишається теж в силі. Виникає питання, а для яких функцій попиту множина E нульової міри Лебега відсутня? Виявляється, що відсутність множини E можлива за такої додаткової умови в раціональній поведінці споживачів, як ефективність споживання і витрат. До принципу раціональної поведінки споживачів додамо умову ефективності споживання (витрат) за допомогою таких величин. Величина $\frac{f(x)-f(x+\delta)}{x+\delta-x}=\frac{f(x)-f(x+\delta)}{\delta}$ ($\delta > 0$) визначає середню споживчу ефективність, тобто споживчий ефект, на кожну додану грошову одиницю при зміні ціни від x до $x+\delta$, аналогічно, величина $\frac{xf(x)-(x+\delta)f(x+\delta)}{\delta}$ ($\delta > 0$) – середню ефективність витрат, тобто витратний ефект на кожну додану грошову одиницю при зміні ціни від x до $x+\delta$. Таким чином, принцип раціональної поведінки споживачів тепер полягає в тому, що з ростом ціни ефективність споживання (витрат) спадає або зростає. Математична модель спадної (зростаючої) ефективності споживання характеризуватиметься тим, що функція $\frac{f(x)-f(x+\delta)}{\delta}$ ($\delta > 0$) спадна (зростаюча), як з ростом ціни x, так і з ростом доданої вартості δ до ціни, тобто функція спадна (зростаюча) за обома змінними. Аналогічно, математична модель спадної (зростаючої) ефективності витрат характеризується тим, що функція $\frac{xf(x)-(x+\delta)f(x+\delta)}{\delta}$ ($\delta > 0$) спадна (зростаюча), як з ростом ціни x, так і з ростом доданої вартості δ до ціни.

Розглянемо довільну точку x (довільне значення ціни) множини E. Для визначеності допустимо, що споживча ефективність спадна. Виходячи із спадної споживчої ефективності, для вгнутої вниз (вверх) функції попиту $f(x)$ і довільного $\delta > 0$ справедлива нерівність:

$$\frac{f(x-\delta)-f(x)}{\delta}>\frac{f(x)-f(x+\delta)}{\delta}, \tag{8}$$

яка рівнозначна нерівності

$$\frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta}<\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}. \tag{9}$$

За принципом раціональної поведінки функція $\frac{f(x-\delta)-f(x)}{\delta}$ $\left(\frac{f(x)-f(x+\delta)}{\delta}\right)$ спадна (зростаюча) при $\delta \to 0$. Тоді, функція $\frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta}$ $\left(\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}\right)$ зростаюча (спадна) при δ → 0. Далі, із нерівності (9) випливає, що функція $\dfrac{f(x)-f(\mathrm{x}-\delta)}{\delta}$ $\left(\dfrac{f(x+\delta)-f(\mathrm{x})}{\delta}\right)$ зростаюча (спадна) обмежена зверху (знизу) при δ → 0,і як відомо, має скінченну границю зліва (справа) в точці *x*. За визначенням, вказана границя – це лівостороння $f`(x\text{-}0)$ (правостороння $f!(x+0)$) похідна в точці *x*. Якщо допустити, що в точці *x* похідна функції попиту *f(x)* не існує, то різниця $f`(x\text{-}0)-f`(x+0)$ стає додатною. Лівостороння похідна функції попиту визначає граничне значення споживчої ефективності, коли ціна на ринку зростає, наближаючись до значення *x* і при подальшому досить незначному їх збільшенні ефективність споживчого попиту буде близькою до граничного значення, яким є правостороння похідна функції попиту. Таким чином, додатна різниця $f`(x–0)-f`(x+0)$ визначає, що при переході через ціну (*x*) спостерігається різка зміна споживчої ефективності.

Можна вважати очевидним математичним фактом, що для функції *f(x)*, існування односторонніх похідних рівнозначне існуванню односторонніх похідних і для функції *xf(x)*, і не існування похідної *f(x)* в точці *x* рівнозначне не існуванню похідної *x f(x)* в цій точці. Як наслідок, додатна різниця $f`(x–0)-f`(x+0)$ приводить до додатної різниці для односторонніх похідних функції витрат *x f(x)*. При переході через ціну *x* відбувається різка зміна ефективності витрат, тобто різке падіння витрат на додану одиницю ціни. Таке падіння витрат на одну грошову одиницю може бути пов’язане з падінням, або зростанням доходів споживачів, або його розподіл за іншими факторами (2–5), які впливають на попит. За самим визначенням закону попиту зміна такого фактора, як суспільний дохід або зміна інших факторів в результаті його перерозподілу, не можлива. Таким чином повинна мати місце рівність односторонніх похідних у точці, тобто диференційованість функції попиту.

Як висновок, закон попиту і принцип раціональності, що полягає в монотонній ефективності споживання приводять до існування такої важливої функціональної характеристики функції попиту, як існування її похідної. Навпаки, існування похідної функції попиту приводить до наявності принципу раціональної поведінки споживачів.

Із такого принципу раціональної поведінки споживачів як монотонна ефективність споживання витікає ще один важливий факт, як неперервність самої похідної функції попиту, що досить часто використовується в теоретичних дослідженнях її функціональних властивостей. Доведення неперервності похідної функції попиту проведемо за такими математичними міркуваннями. Якщо *f(x)* функція попиту, то потрібно встановити існування односторонніх границь $\lim\limits_{t\leftrightarrow 0} f`\left(x+t\right)$, $\lim\limits_{t\leftrightarrow 0} f`\left(x-t\right)$ і їх рівність похідній $f`\left(x\right)$. Виходячи із принципу спадної ефективності споживання, для довільних $x > 0$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, t > ε має місце ланцюг нерівностей $\dfrac{f\left(x+\delta+t\right)-f(\mathrm{x+t})}{\delta} \geq \dfrac{f\left(x+\delta+\varepsilon\right)-f(\mathrm{x}+\varepsilon)}{\delta} \geq \dfrac{f\left(x+\delta\right)-f(\mathrm{x})}{\delta}$. Перехід до границі в цих нерівностях при $\delta \to 0$ приносить відповідні нерівності для похідних:

$$f`(\mathrm{x+t}) \geq f`(\mathrm{x}+\varepsilon) \geq f`(\mathrm{x}) \qquad (10)$$

Із нерівностей (10) випливає, що похідна функції попиту монотонно спадна обмежена знизу функція, тому має скінченну границю $\lim\limits_{t\leftrightarrow 0} f`\left(x+t\right)$. За аналогічними міркуваннями можна одержати ланцюг нерівностей, $f`(\mathrm{x-t}) \leq f`(\mathrm{x}-\varepsilon) \leq f`(\mathrm{x})$, за якими отримати існування скінченної границі $\lim\limits_{t\leftrightarrow 0} f`\left(x-t\right)$. Рівність обох границь похідній *f`(x)* випливає із рівностей:

$$\lim_{t\leftrightarrow 0} f`\left(x+t\right) = \lim_{t\leftrightarrow 0}\lim_{\delta\leftrightarrow 0} \frac{f\left(x+\delta+t\right)-f\left(x+t\right)}{\delta} = \lim_{\delta\leftrightarrow 0}\lim_{t\leftrightarrow 0} \frac{f\left(x+\delta+t\right)-f\left(x+t\right)}{\delta} = f`(x).$$

Аналогічним способом можна отримати і рівність $\lim\limits_{t\leftrightarrow 0} f`\left(x-t\right) = f`(x)$.

За результатами отриманих досліджень варто надати ряд теоретичних і практичних висновків. Насамперед розглядається детермінована економіко-математична модель попиту на основі гіпотетичного неперервного розширення його статистичної моделі, шляхом визначення функції, що задовольняє статистичні дані. Економічна модель будується на законі попиту і принципу раціональної поведінки споживачів стосовно споживання і витрат. Математична модель попиту виникає на основі функціональних характеристик кривої попиту. Закон попиту дає можливість зарахувати функцію попиту до класу монотонно спадних функцій, і навпаки, монотонно спадна функція попиту відображає закон попиту. Принцип спадного або зростаючого ефекту дає можливість зарахувати функцію попиту до класу вгнутих (вниз і вверх) функцій. Навпаки, вгнута функція попиту визначає наявність принципу спадного або зростаючого споживчого ефекту. Принцип монотонності споживчої ефективності зараховує функцію попиту до класу гладких функцій (функцій, що мають неперервну похідну).

Графічне представлення функції попиту у вигляді монотонної, монотонно вгнутої , монотонно вгнутої гладкої кривої дає можливість розбити область зміни ціни (від найменшого до найбільшого значення) на проміжки, на яких крива попиту розбивається на куски названих кривих. Наприклад, на рисунок 1 зображена гладка крива попиту для престижних товарів. За заданими візуальними функціональними характеристиками кривої попиту можна зробити такі висновки. На проміжку [$min(x); x_0$] крива попиту неперервна, монотонно зростаюча, вгнута вверх функція; на проміжку [$x_0; min(x)$] – неперервна, монотонно спадна, вгнута вверх функція. Таким чином, зростання ціни від $min(x)$ до x приводить до збільшення попиту і зменшення споживчого ефекту (зменшення споживання). Додаткова вимога існування похідної кривої попиту приводить до зменшення ефективності споживання. Що стосується витрат споживачів, то із зростанням попиту зростають витрати, тобто зростання функцій $xf(x)$.

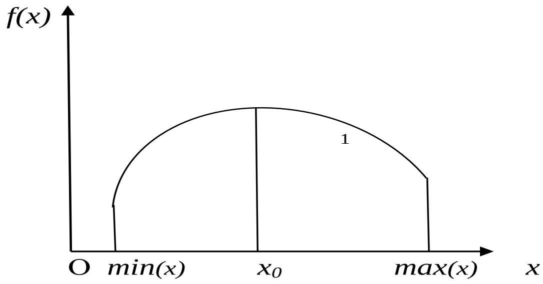

Рис. 1. гладка крива попиту

Тоді, за твердженням 2 функція $xf(x)$ вгнута вверх Таким чином відбувається спад ефективності витрат. Зростання ціни від x_0 до $max(x)$ викликає спад величини попиту, за твердженням 1 вгнутість вверх кривої попиту фіксує спад споживчого ефекту на додані грошові кошти (зокрема на кожну додану грошову одиницю). Нарешті, існування похідної забезпечує ефективність споживання. Стосовно витрат, їх аналіз можливий у випадку, коли функція $xf(x)$ спадає, тоді, за твердженням 2 функція $xf(x)$ вгнута вверх, тобто маємо спадну ефективність витрат. Стосовно монотонності, випадок, коли функція $xf(x)$ не є спадною на проміжку [$x_0; min(x)$], не має однозначного тлумачення, тому не може бути висновків по відношенню ефективності витрат.

На даному прикладі проведено економічний аналіз попиту за видом функціональної залежності величини попиту від ціни, тобто розглянута гіпотетична функціональна модель поведінки попиту. Наступний приклад демонструє аналогічну функціональну модель поведінки попиту за статистичними даними. На рисунку 2 зображено статистичні дані залежності величини попиту від ціни.

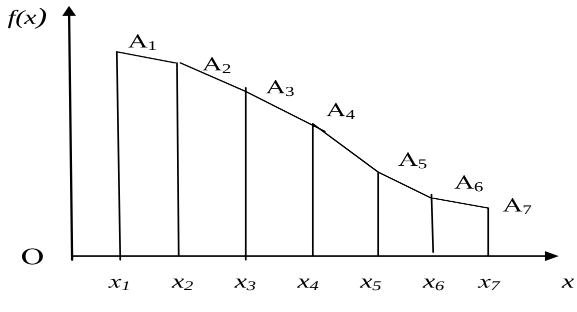

Рис. 2. статистичні дані залежності величини попиту від ціни

Передбачається, що неперервним продовженням статистичної моделі є вид функціональної залежності – ламана крива (полігон). Неперервне продовження дає можливість прогнозних рішень для величини попиту. Оскільки модель попиту детермінована, то прогнозні рішення не матимуть статистичної оцінки і за своєю суттю є орієнтовними. Конкретні статистичні дані цін x_i і величини сукупного попиту $f(x_i)$ в даному прикладі не приводяться. Важливим є те, що проміжки між цінами незмінні $x_{i+1} - x_i = \delta$ і самі ціни не є вибірковими. Проведемо аналіз лише за візуальним зображенням ламаної кривої попиту. Функція попиту є монотонно спадною кривою – закон попиту на ринку товарів і послуг виконується. На перший погляд це так. На проміжку зміни ціни [$x_{1;}\ x_4$] функція попиту вгнута вверх, тому ефект споживання зростаючий (на кожну додаткову одиницю ціни обсяг споживання падає), на проміжку $[x_{4;}\, x_7]$ функція попиту вгнута вниз тому ефект споживання спадний. У точках зламу кривої попиту існують тільки односторонні похідні, різниця яких визначає стрибок в зміні ефективності витрат споживачів при переході ціни через її статистичні значення. Таким чином порушуються умови 2–5 закону попиту. Порушення умов приводить до зсуву кривої попиту на кожній дільниці $(x_{i;}\, x_{i+1})$ зміни величини попиту. Приведена модель попиту не може бути реальною.

Висновки. Отримані в результаті дослідження теоретичні положення для функціональних характеристик кривих попиту, таких як вгнутість, гладкість, з урахуванням раціональної поведінки споживачів на ринку товарів і послуг дають додаткові практичні можливості в побудові їх економіко-математичних моделей. Методи досліджень можуть бути застосовані для виявлення функціональних характеристик і для кривих пропозиції.

Список використаної літератури:

1. *Абланская Л.В.*Экономико-математическое моделирование / *Л.В. Абланская*. – М. : Экзамен, 2006. – 798 с.
2. *Аврех Г.Л.* Затраты и результаты / *Г.Л. Аврех*. – М. : Наука, 1990. – 512 с.
3. *Базилевича В.* Економічна теорія : підручник / *В.Базилевича*. – Київ : Знання, 2008. – 713 с.
4. *Колемаев В.А.* Математическая экономика : учебник / *В.А. Колемаев*. – М. : ЮНИТИ–ДАНА, 2002. – 480 с.
5. *Натансон И.П.*Теория функций вещественной переменной */ И.П. Натансон*. – М. : Наука, 1974. – 480 с.
6. *Маккінел К.Р.* Аналітична економіка. Мікроекономіка / *К.Р. Маккінел*, *С.Л. Брю* ; пер. з англ. *С.Панчишин*, *О.Ватаманюк*. – Львів : Просвіта, 1999. – 423 с.
7. *Фишер С.* Экономика / *С.Фишер*, *Р.Дорнбуш*, *Р.Шмалензи*. – М. : Дело, 1993. – 289 с.
8. *Ястремський О.І.* Основи мікроекономіки : підручник / *О.І. Ястремський*, *О.Г. Гриценко*. – К. : Товариство «Знання» КОО, 2007. – 578 с.
9. *Косік А.Ф.* Мікроекономіка : навч. посібник / *А.Ф. Косік*, *Г.Е. Грантковська*. – К. : ЦУЛ, 2008. – 435 с.
10. *Нечепуренко М.И.* Итерации вещественных функций и функциональных уравнений / *М.И. Нечепуренко*. – Новосибирск, 1997. – 228 с.
11. *Солонінко К.С.* Моделювання кривих виробничих можливостей та попиту / *К.С. Солонінко*, *А.Й. Щехорський* // Вісник ЖДТУ. Економічні науки. – 2017. – № 1. – С.94–99.

References:

1. Ablanskaja, I.V. (2006), *Jekonomiko-matematicheskoe modelirovanie*, Jeksamen, Moskow, 798 p.
2. Ayreh, G.L.(1990), *Zatraty i rezultaty,* Nauka, Moskow. 512 p.
3. Bazylevych, V.(2008), Economichna teorija, pidruchnyk, Znannja, Kyi`v, 713 p.
4. Kolemaev, V.F. (2002), Matematicheskaja jekonomika, uchebnyk, JuNITI–DANA, Moskow, 480 p.
5. Natanson, I.P. (1974), *Teorija funkcij veschestvenoj peremennoj*, Nauka, Moskow, 480 p.
6. Makkinel, K.R. and Brju, S.L. (1999), *Analitychna ekonomika. Mikroekonomika*, Translated by english Panchyshyn, S. and Vatamanjuk, O., Prosvita, L`viv, 423 p.
7. Fisher, S., Dornbush, R. and Shmalenzi, R. (1993), *Jekonomika*, Delo, Moskow, 289 p.
8. Jastremski, O.I. and Gricenko, O.G. (2007), *Osnovy mikroekonomiky*, Tovaristvo «Znannja» KOO, Kyi`v, 578 p.
9. Kosik, A.F. and Grankovska, G.E. (2008), *Mikroekonomika*, GUI, Kyi`v, 435 p.
10. Nechepurenko, M.I. (1997), *Iteracii` veschestvennih funcij i funkcionalnih uravnenij*, Novosibirsk, 228 p.
11. Soloninko, K.S. and Schechorskiy, A.Yo. (2017), «Pryncyp racyonalnosty v ekonomichnomu modelyuvanni popytu», *Visnyk ZhDTU,* Vol. 1 (79), pp. 94–99.

Валінкевич Наталія Василівна – професор Житомирського державного технологічного університету.
Наукові інтереси:
– економіка та управління підприємствами;
– підприємництво та торгівля;
– потенціал, розвиток та модернізація підприємств.

Солонінко Константин Степанович. – професор Житомирського державного технологічного університету.
Наукові інтереси:
– удосконалення методики викладання економічних дисциплін;
– глобальна економіка і проблеми глобалізації:
– макро і мікроекономічний аналіз..

Щехорський Анатолій Йосипович. – доцент Житомирського державного університету імені Івана Франка.
Наукові інтереси:
- економіко-математичне моделювання.

Стаття надійшла до редакції 14.03.2019.