УДК 65.86

Щехорський А.Й., к.е.н., доц.
Житомирський державний технологічний університет

ДО ПИТАННЯ МОДЕЛЮВАННЯ БЕЗЗБИТКОВИХ ОБСЯГІВ ВИРОБНИЦТВА

Пропонується метод побудови моделі точок беззбитковості

Постановка проблеми: неоднозначність сучасних підходів до побудови моделей критичних обсягів виробництва вимагає їх оптимізації.

Задачі дослідження: розробка методики побудови моделей критичних обсягів виробництва в тісному поєднанні економічних математичних і інформаційних підходів з метою їх впровадження в навчальному процесі.

Як відомо, по відношенню фактора часу економіко-математичні моделі діляться на статичні і динамічні. До статичних моделей належать моделі планування діяльності підприємства, пов'язані з розподілом ресурсів незалежно від часу. До динамічних моделей належать моделі, що забезпечують прийняття рішень по управлінню функціонування підприємством (пов'язані з часом).

В умовах ринкових відносин підприємств однією з головних вимог до управління функціонування підприємством є забезпечення його: а) фінансової стійкості; б) поточної платоспроможності; с) рівня самофінансування. Ці вимоги повинні бути відображені в структурі моделей підприємства – модель повинна відображати:

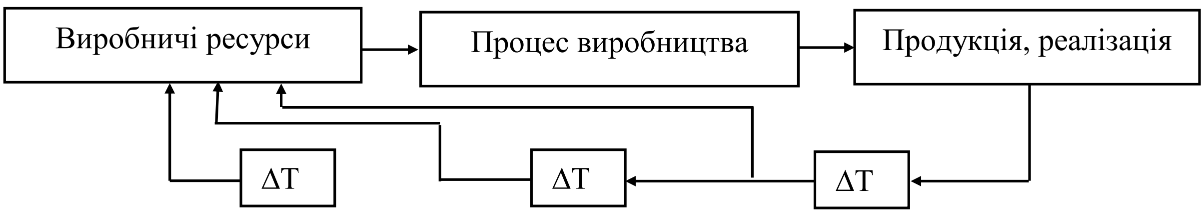
– фінансово-грошовий механізм підприємств і джерела його формування;

– обернений зв'язок між обсягами випуску і реалізації продукції (вихідна модель підприємства) і ресурсами виробництва (вхідна модель підприємства).

Статичні моделі планування діяльності підприємства ґрунтуються на жорсткому прямому зв'язку наявних виробничих ресурсів в процесі виробництва і об'єму випущеної продукції. Ці моделі можна подати за такою схемою:

Особливість статичних моделей – відсутність оберненого зв'язку "продукція-ресурси".

Так як в ринкових умовах підприємства в основному знаходяться на самофінансуванні, то об'єм виробничих ресурсів істотно залежить від реалізованої продукції, що вироблялась підприємством в попередні періоди, тобто більш реальною є динамічна модель функціонування підприємства, що враховує вплив ринку. Спрощено динамічну модель можна подати за схемою:



В цій схемі ΔT означає фіксований період часу (запізнення, лаг) протягом якого буде реалізована певна частина продукції, а із одержаних за неї платежів буде сформована частина виробничих ресурсів.

Для спрощення процесу моделювання беззбитковості бажано дотримуватись наступних вимог:

1. Підприємство виробляє і реалізує тільки один вид продукції (однопродуктова модель).

2. Вважається, що ринок вивчений, стабільний, є статистика про питому вагу реалізації продукції в аналізованому періоді.

3. Продукція реалізується за однією ціною.

4. Собівартість реалізованої продукції з урахуванням всіх загальновиробничих витрат вважається незмінною.

Як відомо, економічна модель беззбиткового обсягу виробництва аналізованого періоду одержується шляхом співставлення всієї чистої виручки, яка може бути отримана підприємством в аналізованому періоді, сукупним витратам підприємства в тому ж періоді. Той обсяг виробництва аналізованого періоду, при якому вся чиста виручка збігається з сукупними витратами називають точкою беззбитковості аналізованого періоду.

Перейдемо до формування математичної моделі беззбиткового обсягу виробництва аналізованого періоду. Домовимось в наступних позначеннях. Нехай a – питома вага (відсоток) реалізованої продукції в аналізованому періоді, C – відпускна ціна продукції в аналізованому періоді, X – обсяг виробленої продукції в аналізованому періоді, α – ставка ПДВ (α €(0;1)), β – ставка акцизного збору (β €(0;1)), U – одиничні змінні витрати, Z – постійні витрати за весь аналізований період. Слід пам’ятати, що величини змінних витрат U і постійних Z скореговані в сторону зменшення на величину ПДВ оплачену підприємством постачальникам матеріальних ресурсів.

Розмір виручки становитиме – aCX, розмір чистої виручки – (1-α)(1-β) aCX у.о., UX+Z – величина сукупних витрат. Як було вже сказано, для визначення беззбиткового обсягу (позначимо X_b) співставляють чисту виручку (1-α)(1-β)aCX, за вироблену продукцію обсягу X, сукупним витратам UX+Z, тобто розглядають (балансову тотожність) рівняння,

$$(1-\alpha)(1-\beta)aCX = UX + Z \qquad (1)$$

розв’язок якого, за умови C >U/ a(1- α)(1-β), знаходиться за формулою,

$$X_b = \frac{Z}{(1-\alpha)(1-\beta)aC - U} \qquad (2)$$

Формула (2) визначає математичну модель точки беззбитковості (порогу рентабельності) в натуральному виразі, вартісний вираз – CX_b. Зробимо зауваження, що визначення точки беззбитковості за формулою (2) за офіційною звітністю аналізованого періоду стає неможливим через невідображення в ній змінних одиничних витрат. Тому точку беззбитковості визначають у вартісному виразі – (1-α)(1-β)aCX_b. Для цього формулу (2) перетворимо наступним чином – помножимо її на (1-α)(1-β)aC, після перетворень одержимо рівність

$$(1-\alpha)(1-\beta)aCX_b = \frac{Z}{\dfrac{(1-\alpha)(1-\beta)aC - U}{(1-\alpha)(1-\beta)aC}} = \frac{Z}{\dfrac{(1-\alpha)(1-\beta)aCX_P - UX_P}{(1-\alpha)(1-\beta)aCX_P}} \qquad (3)$$

де X_P – обсяг випуску продукції звітного періоду. Ліва частина рівності (5) представляє чистий дохід точки беззбитковості. Вираз (1-α)(1-β)aCX_P-UX_p, тобто різницю між чистим доходом (рядок 035, Форма №2) і змінними витратами (рядок 040, Форма №2) є маржинальним прибутком звітного періоду. Відношення ((1-α)(1-β)aCX_p-UX_p)/(1-α)(1-β)aCX_p називають коефіцієнтом валової маржі. Таким чином, для визначення точки беззбитковості у вартісному виразі потрібно постійні витрати (рядок 070 + рядок 080+ рядок 260, Форма №2) поділити на коефіцієнт валової маржі, визначивши попередньо змінні витрати = операційні витрати – постійні витрати (рядок 280-рядок 070 + рядок 080 + рядок 260, Форма №2). Слід зауважити, що точка беззбитковості у вартісному виразі може бути розрахована за формулою (3) і у випадку, коли аналізований період є плановим (X_p – у формулі (3) плановий обсяг випуску продукції).

Знаходження точки беззбитковості за формулою (2) може бути проілюстровано з допомогою геометрії. Для цього по горизонтальній осі OX (рис. 1) відкладають обсяги випуску продукції X, по осі OY –

значення функції від обсягу випуску Y. В рівності (1) такими функціями є Y = Z – функція постійних витрат, Y = (1-α)(1-β)aCX – функція виручки, Y = UX – функція змінних (валових, маржинальних) витрат, Y = UX + Z – функція сукупних (операційних) витрат, яка одержується із графіка функції змінних витрат зсувом останнього на Z одиниць по осі OY.

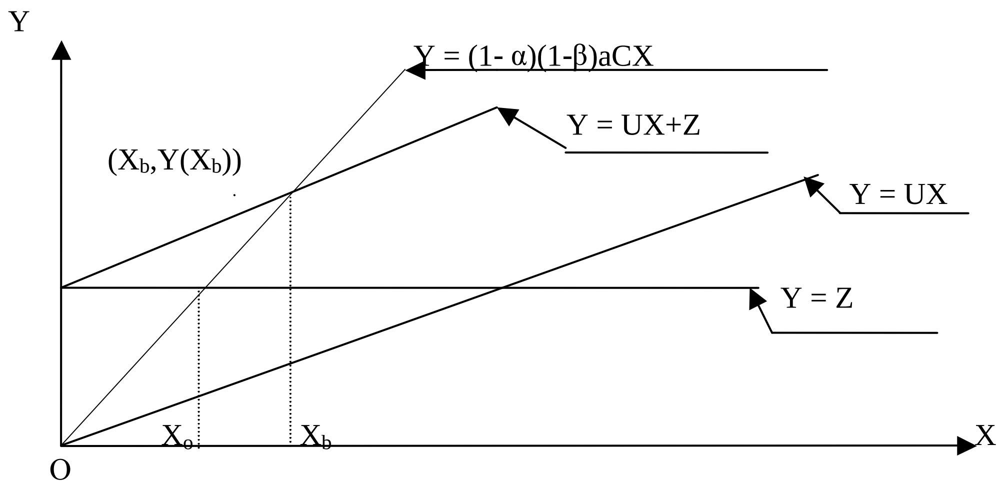


Рис.1

Геометричний зміст точки беззбитковості – це абсциса точки перетину прямої сукупних витрат і прямої виручки.

Зробимо геометричне пояснення щодо одержання точки беззбитковості у вартісному виразі звітного періоду (рис. 2) за офіційною звітністю. По горизонтальній осі відкладемо чистий дохід (1-α)(1-β)aCX, по вертикальній осі витрати V. Пряму змінних витрат V = UX як функцію обсягу випуску продукції X представимо як функцію від доходу V= $(UXb/C(1\text{-}\alpha)(1\text{-}\beta)aX_b)(1\text{-}\alpha)(1\text{-}\beta)aCX$, пряму постійних витрат V = Z, пряму операційних витрат – від доходу $(UX_b/C(1\text{-}\alpha)(1\text{-}\beta)aX_b)(1\text{-}\alpha)(1\text{-}\beta)aCX+Z$, пряму беззбитковості V = (1-α)(1-β)aCX, остання в перетині з прямою операційних витрат дасть точку беззбитковості $B(CX_b; Z+UX_b)$.

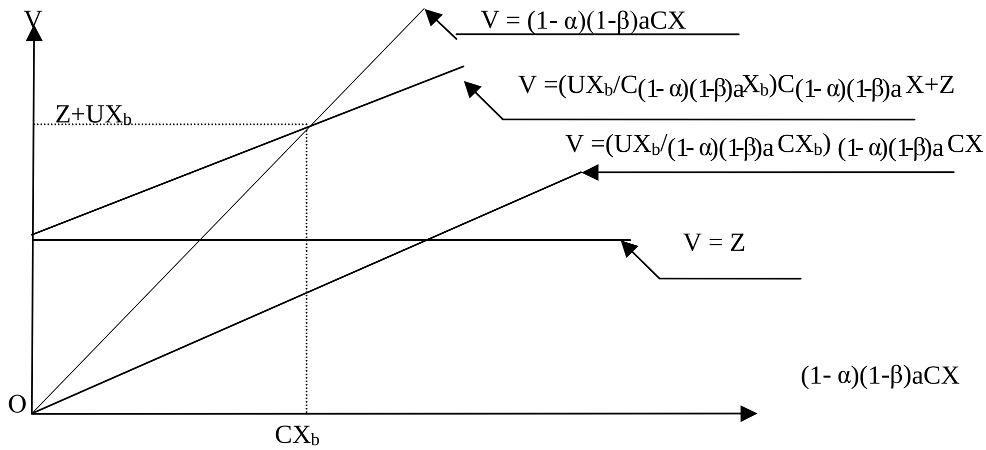


Рис. 2

В системах комп’ютерної математики Excel і Mathcad 2001 Pro. Автором створені програми, що працюють в автоматичному режимі знаходження точки беззбитковості як у формульному так і в графічному редакторі. На Рис. 3 приведено роздрук такої програми в системі Mathcad 2001 Pro.

Однопродуктова модель розрахунку і геометричного визначення точки беззбитковості в натуральному виразі.

Потрібно внести: в першу ячейку постійні витрати; в другу – ціну одиниці продукції; в третю – змінні витрати на одиницю продукції; в четверту плановий (прогнозний) обсяг випуску продукції.

Постійні витрати | **Ціна** | **Змінні витрати** | **Плановий (прогнозний) випуск.**

Tb :=

	1	2	3	4
1	6500	25	15	740

Результати

Точка беззбитковості у натуральному виразі TB = 650

Графічне зображення точки беззбитковості PV(x) – графік постійних витрат; ZV(x) – графік змінних витрат; ZPV(x) – графік сукупних витрат; VR(x) – графік виручки.

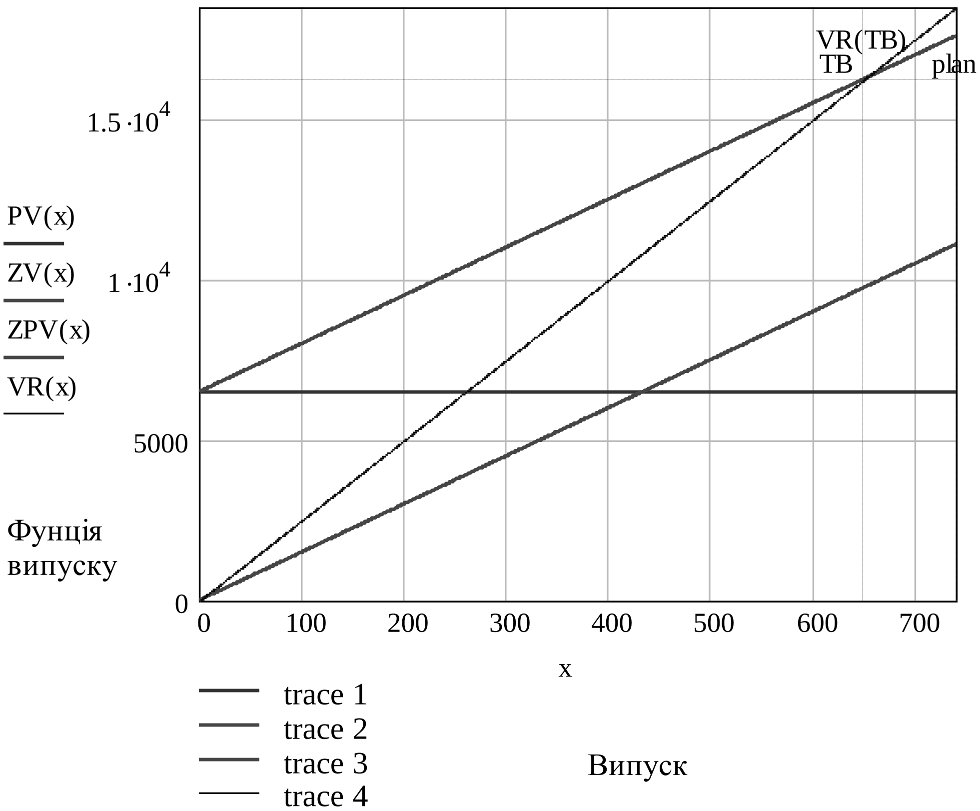


Рис.3

В системах комп'ютерної математики Excel і Mathcad 2001 Pro. автором створені програми, що працюють в автоматичному режимі знаходження точки беззбитковості за офіційною звітністю як у формульному так і в графічному редакторі. На рис. 4 приведено роздрук такої програми в системі Mathcad 2001 Pro.

Розрахунок і геометричне визначення точки беззбитковості за звітністю аналізованого періоду.

В першу ячейку таблиці “Tab” потрібно занести постійні витрати; в другу – змінні витрати; в третю – чистий дохід.

Tab :=

	Постійні витрати	Операційні витрати	Чистий доход
	1	2	3
1	8592	19459	27278

Точка беззбитковості у вартісному виразі $TB = 1.4281 \times 10^{4}$

Графічне зображення точки беззбитковості.

pv (x) – графік постійних витрат; zv(x) – графік змінних витрат; zpv (x) – графік сукупних витрат; vb(x) – графік прямої беззбитковості.

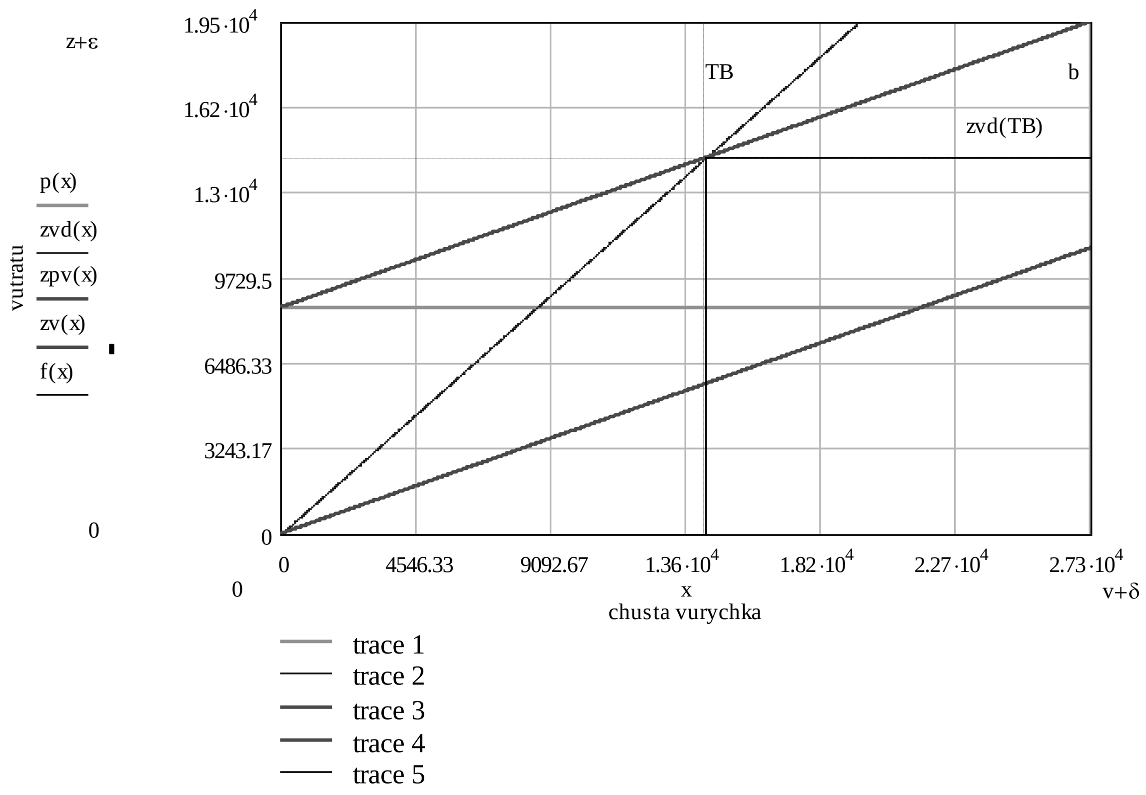


Рис.4

Рекомендується використовувати для графічного зображення точки беззбитковості графічний редактор комп'ютерних систем Mathcad Pro, так як він є більш пристосованим в режимі автоматичного виконання завдання, ніж графічний редактор системи Excel. Вивчення студентами систем Mathcad Pro не представляє великих ускладнень після знайомства їх з системою Excel.

Формули (2) і (3) не дають відповіді на питання, за якого стану функціонування підприємства в аналізованому періоді може бути досягнута точка беззбитковості. Зовсім інша природа геометричного тлумачення точки беззбитковості (Рис. 1) – для кожного обсягу випуску продукції Х на графіках можна вказати відповідні ординати змінних і сукупних витрат, що відповідають виручці від реалізації обсягу випуску продукції Х. Таким чином, геометрична модель точки беззбитковості належить до моделей функціонування підприємства в аналізованому періоді. Більше того, вона відображає ідеалізований варіант одномоментного здійснення наступних процесів – реалізація продукції в аналізованому періоді і придбання виробничих ресурсів за рахунок виручки від її реалізації. Хоча час в геометричній моделі точки беззбитковості явно не присутній (неявна присутність пов'язана з випуском продукції в часі), але присутність в ній відображення зворотного зв'язку "продукція–ресурси", хоча і в ідеалізованій формі, дає право належати їй до динамічних моделей беззбитковості.

Що стосується формул (2) і (3), то вони визначають статичну модель беззбитковості аналізованого періоду.

На перших етапах процесу моделювання беззбитковості будемо вважати, як додаткову його вимогу, до існуючих вже чотирьох, п'яту:

5. Має місце одномоментний процес – реалізація продукції в аналізованому періоді і придбання виробничих ресурсів за рахунок виручки від її реалізації.

Подальша побудова моделі точки беззбитковості буде здійснена в плані відмови від обмеження 3 тобто, наприклад, коли підприємство планує реалізацію своєї продукції на різних ринках, а значить, взагалі кажучи, за різними цінами. Як тоді буде виглядати математична модель беззбитковості? Як виглядатиме статична і динамічні моделі точки беззбитковості?

Домовимось в наступних позначеннях. Обсяги поставок продукції на n-ринках позначимо через X1, X2, …, Xn; ціни реалізації – C1, C2,..., Cn відповідно. Кожен із ринків диктує, як правило, (обмеження на можливість реалізації продукції виробника) відповідні межі збуту X1*, X2*,…, Xn* , тобто X1 ≤ X1*, X2 ≤ X2*,…, Xn ≤ Xn* . Статична математична модель беззбитковості одержується в результаті співставлення виручки за поставлену продукцію і сукупних витрат, що фактично виражається у розв'язку рівняння,

$$\sum_{j=1}^{n} C_j X_j = \sum_{j=1}^{n} U X_j + Z \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (C_j - U) X_j = Z \qquad (4)$$

при заданих обмеженнях X1 ≤ X1*, X2 ≤ X2*,…, Xn ≤ Xn*. Для ілюстрації розглянемо модель для двох цін, попередньо записавши рівняння прямої (4) у відрізках (для цього рівняння (4) потрібно поділити на Z), при заданих обмеженнях X1 ≤ X1*, X2 ≤ X2*, що представляють собою прямокутник координатної площини X10X2 (Рис. 5).

$$\frac{X_1}{\frac{Z}{C_1 - U}} + \frac{X_2}{\frac{Z}{C_2 - U}} = 1 \qquad (5)$$

Множиною розв'язків рівняння (5) при заданих обмеженнях X1 ≤ X1*, X2 ≤ X2* є перетин відрізка прямої першої четверті з прямокутником – це відрізок АВ. З математичної точки зору існує нескінченна кількість розв'язків рівняння (5) при заданих обмеженнях X1 ≤ X1*, X2 ≤ X2*, тобто нескінченна кількість точок беззбитковості, яка тепер характеризується не одним параметром (числом), а парою чисел (X1; X2). З економічних міркувань, із-за неподільності одиниць виміру обсягу випуску продукції (послуги), таких точок беззбитковості скінченна кількість. В загальному випадку, для n-цін, множина точок беззбитковості є результат перетину n-вимірного паралелепіпеда з гіперплощиною (4), кожна з яких характеризується набором чисел (X1; X2; ... , Xn). Так як рівняння (4) можна звести до діафантового, то в самому загальному випадку (для n-цін) є проблематичною побудова алгоритму отримання всіх точок беззбитковості.

Перш ніж перейти до побудови динамічної моделі беззбитковості в загальному випадку розглянемо конкретні приклади.

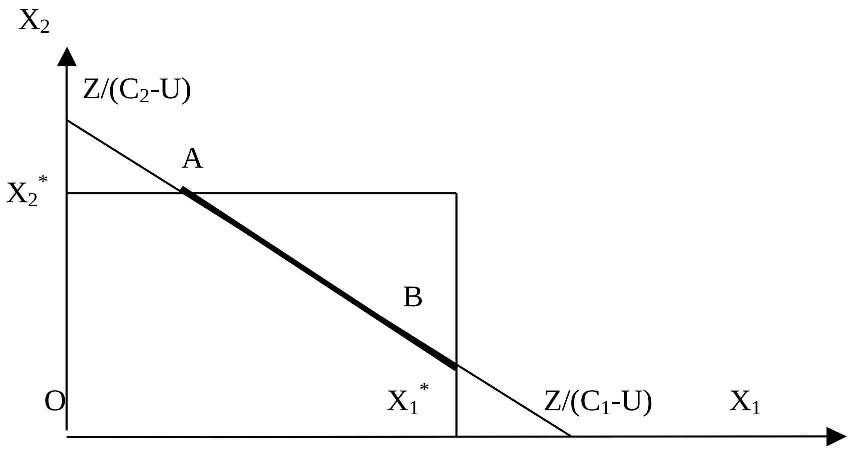


Рис.5

Приклад 1. Підприємець торговельного бізнесу планує закупити товар і продавати його за двома цінами 25 дол. і 20 дол. Змінні витрати для нього складають 15 дол., а постійні – 100 дол. Потрібно знайти беззбиткові обсяги продажу і точки беззбитковості.

Статичну модель беззбитковості можна отримати як результат розв'язку рівняння (4): (25-15)X1 + (20-15)X2 = 100, або 2X1 + X2 = 20. В натуральних числах розв'язками такого рівняння будуть наступні пари чисел: (0;20); (1;18); (2;16); (3;14); (4;12); (5;10); (6;8); (7;6); (8;4); (9;2); (10;0). Очевидно, одна із приведених пар чисел може бути реалізована в процесі продажу продукції підприємцем з імовірністю 1/11. Із приведених міркувань можна зробити висновок, що статична модель беззбитковості є прогнозною моделлю.

Допустимо, що протягом аналізованого періоду підприємцю вдалось реалізувати 15 одиниць продукції за ціною 25 дол. і 20 од. за ціною 20 дол. Для того щоб якомога швидше мати беззбитковий результат продажу підприємцю потрібно спочатку реалізовувати продукцію за найбільшою ціною, фактично орієнтуватися на закон спадної доходності. Таким чином, спочатку потрібно співставити виручку, отриману в результаті реалізації продукту за найбільшою ціною, сукупним витратам. Запишемо рівняння виручки (для простоти викладу без ПДВ, акцизу, вважаючи, що a = 1), враховуючи вказану послідовність продажу,

$$Y(X)=\begin{cases}25X \text{ коли } 0\le X\le 15\\ 20(X-15)+15\times 25=20X+75 \text{ коли } 15< X\le 35(15+20)\end{cases} \tag{6}$$

Графіком функції виручки є ламана вогнута лінія (рис. 6). Співставлення виручки і сукупних витрат геометрично визначає результат перетину ламаної виручки і прямої сукупних витрат. Результат перетину знаходиться як розв'язки рівнянь: 25X = 15X + 100 звідки, X1 = 10 од. і 20X+75 = 15X + 100 звідки, X2 = 5. Відповідь X1 = 10 має зміст, так як належить проміжку [0;15], інше значення X2 = 5 змісту не має бо проміжку (15;35] не належить. В підсумку маємо одну точку беззбитковості (10;0), тобто беззбитковість можна отримати за рахунок продажу 10 штук товару за ціною 25 дол. Крім того, виходячи із рис. 6, можна зробити висновок, що на дільниці OC всі обсяги продажу, (абсциси графіка) що відповідають їй, будуть збитковими, а на дільниці CAB – прибутковими.

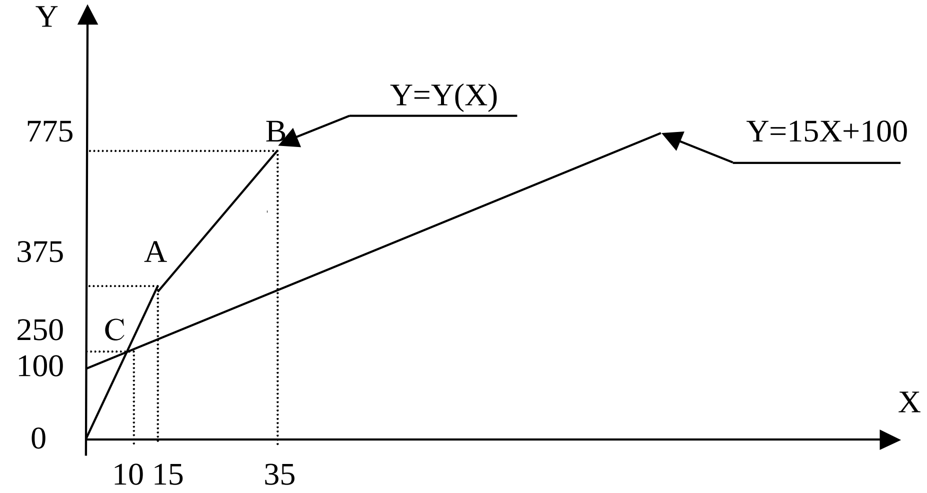


Рис. 6

Приклад 2. Якщо в умові попереднього прикладу постійні витрати підприємця складають 200 дол., то пряма сукупних витратY = 15X+200, буде перетинатись з ламаною виручки тільки по відрізку АВ (Рис. 6), абсциса точки перетину знаходиться із рівняння 15X+200 = 20X+75 звідки, X = 25 (належить проміжку (15;35]), це так званий беззбитковий обсяг реалізації. Таким чином, беззбитковість можна отримати за реалізації 10 штук за ціною 25 дол. і 25 – 10 = 15 штук за ціною 20 дол., точка беззбитковості має координати (10;15).

Незавжди в основі визначення беззбиткових обсягів продажу може лежати закон спадної доходності.

Приклад 3. Представимо собі, що в прикладі 1 для підприємця існує жорстка умова відпуску продукції (підприємець працює на замовлення) спочатку за ціною 20 дол., а потім за ціною 25 дол., постійні витрати складають 300 дол. Графічно така ситуація представлена на Рис. 7.

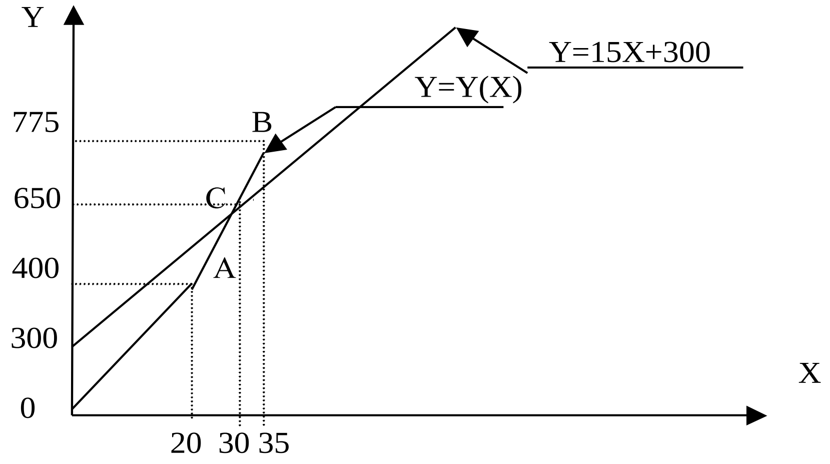


Рис. 7

Рівняння прямої виручки ОА: Y = 20X, рівняння прямої виручки АВ: Y = 25(X-15)+400 = 25X – 100. Пряма сукупних витрат Y = 15X+300 має перетин тільки з відрізком АВ в точці з абсцисою, що є розв'язком рівняння 25X – 100 = 15X+300 звідки X = 30. Точка беззбитковості має наступні координати, С(20;30-20) = С(20;10). Обсяги продажу, що відповідають дільниці ОАС –

збиткові, це обсяги до 30 од. а дільниці CB – прибуткові, це обсяги від 30 од. до 35 од.

У всіх трьох прикладах була присутня одна фактична точка беззбитковості. А чи може бути більше?

Приклад 4. Підприємець торговельного бізнесу планує змінні одиничні витрати 22,5 дол., продавати за двома цінами 25 дол. на одному ринку і, з метою збереження ніші ринку, на другому ринку 20 дол. Постійні витрати для нього складають 25 дол. Потрібно знайти беззбиткові обсяги продажу і точки беззбитковості.

Запишемо рівняння прямої сукупних витрат (рис.8) Y = 22,5X+25. Беззбиткові обсяги збуту отримаємо як результат перетину прямої сукупних витрат з відрізками OA і AB ламаної OAB. Знаходимо абсцису перетину з відрізком OA: 25X = 22,5X+25 звідки, X = 10 од.(належить відрізку [0;15],), абсцису перетину з відрізком AB: 20X+75 = 22,5X+25 звідки, X = 20 од.(належить проміжку (15;35]). Беззбиткові обсяги продажу становлять 10 од. і 20 од. Маємо дві точки беззбитковості C і D з координатами C(10;0) і D(15; 20-15) = (15; 5). Для обсягів продаж до 10 од (на дільниці OC) підприємець має збитки, для обсягів продаж від 10 од. до 20 од. (на дільниці CAD) має прибуток, для обсягів продаж від 20 од. до 35 од. (на дільниці DB) має збитки.

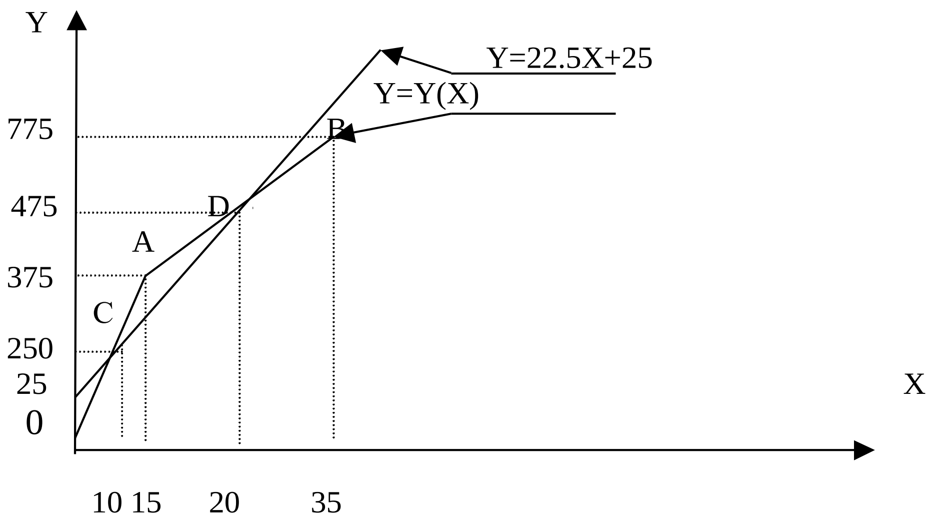


Рис. 8

Невиключно, що збереження ніші ринку для підприємця може стати можливим, коли одиничні змінні витрати будуть співпадати з однією із цін продажу товару, скажімо 20 дол., а постійні витрати нехай будуть 75 дол. В цьому випадку пряма сукупних витрат Y = 20X+75 збігатиметься з прямою виручки. І, як наслідок, всі обсяги продаж від 15 од. до 35 од. будуть беззбитковими, а всіх точок беззбитковості буде налічуватись 11, це всі точки з координатами: (0;15); (16;1); (17;2); . . . ,(35;21).

Аналогічні приклади можна розглядати і у виробничій сфері. Там моделі функціонування набувають більше реального змісту так як процес виробництва більш адекватно відповідає неперервним процесам, ніж процес збуту в торгівлі.

Тепер перейдемо до узагальнення результатів отриманих на конкретних прикладах. В загальному випадку для n-цін рівняння виручки можна записати за формулою (7), яка є узагальненням формули (6). Графічне зображення виручки представляє собою ламану лінію. У випадку, коли є можливість слідувати закону спадної доходності, ламана виручки вогнута крива. Умови ринку – задоволення інтересів партнерів (споживачів продукції, наприклад, підприємство працює на замовлення) можуть викликати порушення закону спадної доходності, тобто спочатку прийдеться виробляти продукцію не за найбільш високими цінами.

$$Y(X)=\begin{cases} C_1X \text{ коли } 0 \le X \le X_1 \\ C_2X + C_1X_1 \text{ коли } X_1 < X \le X_2 + X_1 \\ C_3X + C_2X_2 + C_1X_1 \text{ коли } X_2 + X_1 < X \le X_3 + X_2 + X_1 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ C_nX + \sum_{j=1}^{n-1} C_jX_j \text{, коли } \sum_{j=1}^{n-1} X_j < X \le \sum_{j=1}^{n} X_j \end{cases} \qquad (7)$$

В цьому випадку ламана виручки не буде вогнутою, а взагалі, довільною. А яка загальна кількість таких ламаних може бути? Відповідь, якщо цін n, то – n!(кількість перестановок із n елементів).

Для n-цін, для кожного k = 1,...,n, беззбиткові обсяги випуску продукції знаходяться серед коренів рівняння,

$$Y = UX + Z = \begin{cases} C_1\text{X} \text{ коли } k = 1 \\ C_kX + \sum_{j=1}^{k-1} C_jX_j \text{коли } k \ge 2 \end{cases} \qquad (8)$$

(як абсциси точок перетину прямої сукупних витрат Y=UX+Z і прямих виручки Y=C1X, Y=CkX+∑CjXj k=1,…,n). Корені рівняння (8) знаходяться за формулами:

$$X_k^{\ *} = \begin{cases} \dfrac{Z}{C_1 - U} \quad \text{коли } k = 1;\ C_1 \ne U \\ \dfrac{Z - \sum_{j=1}^{k-1} C_jX_j}{C_k - U} \text{коли} k \ge 2,\ C_k \ne U \end{cases} \qquad (9)$$

Інтерес представляють ті корені Xk* (k≥2), які задовольняють нерівностям Xk ≤ Xk* ≤ Xk+1. Відповідна максимальна кількість наборів беззбиткових обсягів випуску продукції - n! (в деяких випадках їх може не бути взагалі).

В системі комп'ютерної математики Mathcad 2001 Pro. автором створена програма, що працює в автоматичному режимі знаходження точок беззбитковості аналізованого періоду у випадку реалізації продукції в аналізованому періоді за різними цінами. Опис програми буде приведений в наступній статті.

ЩЕХОРСЬКИЙ Анатолій Йосипович – кандидат економічних наук, доцент кафедри менеджменту та маркетингу Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– економіко-математичне моделювання.